多項ロジット・モデルの線形要因分解

太郎丸 博

2020/02/12

本稿は近刊の論文の補論である。本論では、日本の社会学で用いられる方法（理論、歴史、エスノグラフィ、計量の四種類）の比率の 1952～2018 年のあいだの変化がどのような要因によって生じているのか分析している。従属変数である方法は 4 つのカテゴリからなるので、多項ロジット・モデルを用いている。方法の時代による変化は、女性の著者の増加、学生／非常勤の増加、共著論文の比率の変化、特集／一般論文の比率の変化、社会学評論とソシオロジで出版される論文の比率の変化、その他、の 6 要因に分解する。このような要因分解には線形要因分解法という方法があるのでそれを用いるが、線形要因分解は、従属変数は連続変数であることを想定した分析法なので、多項ロジット・モデルにはそのままでは応用できない。そこで、以下のように多項ロジット・モデルを要因分解する。

$\hat{P}_{ij}$ (j = 歴史, エスノグラフィー, 計量) は、論文 i が j という方法を取る確率の予測値で、X_{ik} ($i = 1, \ldots, k$) 論文 i の独立変数の値であるとすると、多項ロジット・モデルは以下のように表される。

$$\log\left(\frac{\hat{P}_{ij}}{\hat{P}_{i理論}}\right) = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{i1} + \beta_{2j}X_{i2} + \cdots + \beta_{kj}X_{ik}. \qquad (1)$$

表記を簡単にするために

$$\log\left(\frac{\hat{P}_{ij}}{\hat{P}_{i理論}}\right) = \hat{y}_{ij} \qquad (2)$$

と表記し直すとすると、

$$\hat{y}_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{i1} + \beta_{2j}X_{i2} + \cdots + \beta_{kj}X_{ik} \qquad (3)$$

である。1952〜1970 年と 2000〜2018 年の各変数の平均値を$\overline{y}_{j古}$、$\overline{y}_{j新}$、$\overline{X}_{k古}$、$\overline{X}_{k新}$ のように表すとすると、

$$\overline{y}_{j古} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\overline{X}_{1古} + \beta_{2j}\overline{X}_{2古} + \cdots + \beta_{kj}\overline{X}_{k古} \qquad (4)$$

$$\overline{y}_{j新} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\overline{X}_{1新} + \beta_{2j}\overline{X}_{2新} + \cdots + \beta_{kj}\overline{X}_{k新} \qquad (5)$$

式(5) から式（4）を引くと

$$\overline{y}_{j新} - \overline{y}_{j古} = \beta_{1j}(\overline{X}_{1新} - \overline{X}_{1古}) + \beta_{2j}(\overline{X}_{2新} - \overline{X}_{2古}) + \cdots + \beta_{kj}(\overline{X}_{k新} - \overline{X}_{k古}) \qquad (6)$$

である。つまり、ある方法が用いられる確率のロジットの平均変化を、独立変数の平均値の変化と対応する係数の積の総和として表すことができる。$\overline{y}_{j\,新}, \overline{y}_{j\,古}$ から計算される方法 j の確率を $P^*_{j\,新}, P^*_{j\,古}$ とすると、式（6）は以下のように書き直せる。

$$\log\left(\frac{P^*_{j\,新}}{P^*_{理論\,新}}\right)-\log\left(\frac{P^*_{j\,古}}{P^*_{理論\,古}}\right)=\beta_{1j}(\overline{X}_{1\,新}-\overline{X}_{1\,古})+\beta_{2j}(\overline{X}_{2\,新}-\overline{X}_{2\,古})+\cdots+\beta_{kj}(\overline{X}_{k新}-\overline{X}_{k古}) \quad (7)$$

さらに対数計算の公式より

$$\log\left(\frac{P^*_{j新}}{P^*_{理論\,新}}\right)-\log\left(\frac{P^*_{j古}}{P^*_{理論\,古}}\right)=\log\left(\frac{P^*_{j\,新}}{P^*_{理論\,新}}\cdot\frac{P^*_{理論\,古}}{P^*_{j古}}\right)=\log\frac{P^*_{j\,新}P^*_{理論\,古}}{P^*_{j古}P^*_{理論\,新}} \quad (8)$$

である。これを(7)に代入して

$$\log\frac{P^*_{j\,新}P^*_{理論\,古}}{P^*_{j古}P^*_{理論\,新}}=\beta_{1j}(\overline{X}_{1\,新}-\overline{X}_{1\,古})+\beta_{2j}(\overline{X}_{2\,新}-\overline{X}_{2\,古})+\cdots+\beta_{kj}(\overline{X}_{k新}-\overline{X}_{k古}). \quad (9)$$

さらに両辺の指数をとると、

$$\frac{P^*_{j\,新}P^*_{理論\,古}}{P^*_{j古}P^*_{理論\,新}}=\exp(\beta_{1j}(\overline{X}_{1\,新}-\overline{X}_{1\,古}))\times\exp(\beta_{2j}(\overline{X}_{2\,新}-\overline{X}_{2\,古}))\times\cdots\times\exp(\beta_{kj}(\overline{X}_{k新}-\overline{X}_{k古})). \quad (10)$$

左辺はオッズ比であり、方法 j のオッズ（この場合は時代の変化による増加度をあらわす） $\frac{P^*_{j\,新}}{P^*_{j\,古}}$ が理論のオッズ $\frac{P^*_{理論\,新}}{P^*_{理論\,古}}$ の何倍かを示す。1 よりも大きければ、理論の増加度よりも方法 j の増加度が大きいことを示す。このような増加度のオッズ比は、式(8) の右辺のように分割することが可能である。式(10) の右辺は $\exp(\beta_{kj}(\overline{X}_{k新}-\overline{X}_{k古}))$ のような独立変数の平均値の時代による変化に、回帰係数をかけて指数変換したものを複数掛け合

わせており、これらは、個々の独立変数の時代による変化が、方法のオッズ比に及ぼした影響の大きさを示すと解釈できる。1 より大きければ、オッズ比を増やし（つまり、方法 j の増加または理論の減少に寄与し）、1 より小さければオッズ比を減らす効果があることになる。表 4 の数値はこのようにして計算した各独立変数の効果を増減パーセント表示にしたもの（$100 \times (\exp(\beta_{kj}(\overline{X}_{k新} - \overline{X}_{k古})) - 1)$）である。

$P^*_{j新}$ のようなアスタリスク付きの確率は理論値であってその時代の実際の比率とは異なるので、その点については注意が必要であるが、正しいモデルが推定されていれば誤差はわずかで実害無いと考えられる。